

Class - XIIth / MATHS / MODEL-TEST PAPER / SET- III

Mathematics

Full Marks – 100

Pass Marks – 33

Time – 3 Hours

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

परीक्षार्थी यथासंभव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।

All questions are compulsory

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

General Instructions:

सामान्य निर्देश :

The question paper consists of 29 questions divided into three sections – A, B and C.

Section – A Comprises 10 questions of 1 marks each.

Section – B Comprises 12 questions of 4 marks each and

Section – C Comprises 7 questions of 6 marks each.

इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन खण्डों – अ, ब और स में बँटे हुए हैं।

खण्ड – अ में प्रश्न है, जिनमें प्रत्येक 1 अंक का है,

खण्ड – ब में 12 प्रश्न है जिनमें प्रत्येक 4 अंक का है तथा

खण्ड – स में 7 प्रश्न है जिनमें प्रत्येक 6 अंक का है।

Use of calculator is not permitted. However, you may ask for logarithmic and statistical tables, if required.

कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है। आवश्यकता हो तो परीक्षार्थी के मांग पर लघुगणकीय तथा संख्यिकीय सारणी उपलब्ध करायी जा सकती है।

Section – A

खण्ड – अ

1. Let * be a binary operation (1)

on Z^+ defined by $a*b = |a - b|$

Find the value of $3 * 5$.

मान लीजिए कि Z^+ में एक द्वि-आधारी संक्रिया *, $a * b = |a - b|$ द्वारा परिभाषित है ; तो $3*5$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. Find the principal value of $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (1)

$\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

3. Find the value of x and y, when : (1)

$$2 \begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$$

x तथा y का मान ज्ञात कीजिए : जबकि

$$2 \begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Find value of $\begin{vmatrix} \cos \emptyset & -\sin \emptyset \\ \sin \emptyset & \cos \emptyset \end{vmatrix}$ (1)

$\begin{vmatrix} \cos \emptyset & -\sin \emptyset \\ \sin \emptyset & \cos \emptyset \end{vmatrix}$: मान ज्ञात करें :

5. Find the slope of the tangent to the curve $y = x^3 - x$ at (2, 4) (1)

वक्र $y = x^3 - x$ के बिंदु (2, 4) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करें।

6. Find (ज्ञात करे) $\frac{dy}{dx}$ (1)

$$y = \log\left(\sin \frac{x}{2}\right)$$

7. Find the value of $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+5} dx$ (1)

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+5} dx$

8. Find the vector of magnitude 8 in the direction of the vector $(5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ (1)

सदिश $(5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ के अनुदिश मापांक 8 वाला सदिश ज्ञात कीजिए।

9. Find the projection of $\vec{a} = (4\hat{i} + 4\hat{j} - 10\hat{k})$ on the vector $\vec{b} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ (1)

सदिश $\vec{a} = (4\hat{i} + 4\hat{j} - 10\hat{k})$ का सदिश $\vec{b} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ पर प्रक्षेप्य ज्ञात कीजिए।

10. If the direction cosines of the line (1)

$$\frac{x-6}{5} = \frac{y+5}{9} = \frac{z-7}{4}$$

रेखा $\frac{x-6}{5} = \frac{y+5}{9} = \frac{z-7}{4}$ का दिक् कोज्याएं ज्ञात कीजिए।

Section – B

खण्ड – ब

11. If $f: R \rightarrow R$ and $g: R \rightarrow R$ are given by $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$. (4)

Find fog and gof.

यदि $f: R \rightarrow R$ तथा $g: R \rightarrow R$, $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित है।

fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

12. Prove that (सिद्ध कीजिए कि) : (4)

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$$

13. Prove that (सिद्ध कीजिए कि) : (4)

$$\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

Or / अथवा

Prove that (सिद्ध कीजिए कि) :

(4)

$$\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2 (3y+k)$$

14. Find the relationship between a and b so that the function f defined by

(4)

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{if } x \leq 3 \\ bx + 3, & \text{if } x > 3 \end{cases} \text{ is continuous at } x=3$$

a तथा b के बीच का संबंध ज्ञात कीजिए जब फलन

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{यदि } x \leq 3 \\ bx + 3, & \text{यदि } x > 3 \end{cases} \text{ बिंदु } x=3 \text{ पर संतत है।}$$

15. If (यदि) $y = (\sin x)^x + \sin^{-1} \sqrt{x}$ + then find (तो ज्ञात कीजिए) $\frac{dy}{dx}$

(4)

Or / अथवा

If (यदि) $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$ then show that (तो दिखाइए कि)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

16. A balloon which always remains spherical has a variable radius. Find the rate at which its volume is increasing with radius when the radius is 10cm. (4)

एक गुब्बारा जो हमेशा गोलीय रहता है चर त्रिज्या रखता है। इसके आयतन में वृद्धि की दर त्रिज्या के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जब गुब्बारे की त्रिज्या $r = 10\text{cm}$ है।

Or / अथवा

Find the intervals in which the function $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ is (4)

(a) Strictly increasing (b) strictly decreasing

अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$

(a) निरंतर वर्धमान हो (b) निरंतर ह्रासमान हो।

17. Evaluate $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$ (4)

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$

18. Find (ज्ञात कीजिए): $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$ (4)

Or/अथवा

Evaluate (ज्ञात कीजिए) : $\int e^x \left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x} \right) dx$

19. Find the value of (मान ज्ञात कीजिए): (4)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

20. Find the unit vector perpendicular to each of the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and (4)

$(\vec{a} - \vec{b})$ where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ के प्रत्येक के लम्बवत एकांक सदिश ज्ञात कीजिए

जहाँ : $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

21. Find the angle between the following planes : (4)

$$3x - 6y + 2z = 7$$

$$2x + 2y - 2z = 5$$

(निम्नलिखित समतलों के बीच का न्यूनकोण ज्ञात कीजिए।)

$$3x - 6y + 2z = 7$$

$$2x + 2y - 2z = 5$$

Or/अथवा

Find the distance of a point $(2, 5, -3)$ from the plane $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$

बिंदु $(2, 5, -3)$ का समतल $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

22. Let A and B be two independent events such that $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ then find (4)

(i) $P(A \cdot B)$

(ii) $P(A \cdot \overline{B})$

(iii) $P(A + B)$

(iv) $P(\overline{A} \cdot \overline{B})$

माना A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ इस प्रकार है कि $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6$
तो ज्ञात कीजिए

(i) $P(A \cdot B)$

(ii) $P(A \cdot \bar{B})$

(iii) $P(A + B)$

(iv) $P(\bar{A} \cdot \bar{B})$

Or/अथवा

Find the probability that the numbers appeared in throwing two dice have a (4)
sum 8 if it is known that on the first die the number 3 always appears.

दो पासों के फेंक में उपर आए अंकों का योग 8 होने की क्या प्रायिकता है, यदि
मालूम हो कि पहले पासे पर बराबर 3 उपर आता है।

Section – C

खण्ड – स

23. Solve the system of linear equations using matrix method. (6)

रेखीय समीकरण निकायों को अव्यूह विधि से हल करें।

$$4x + 3y + 2z = 60$$

$$2x + 4y + 6z = 90$$

$$6x + 2y + 3z = 70$$

अथवा / Or

Obtain the inverse of the matrix using elementary operations. (6)

प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

24. Find the local maximum and minimum value of the given function: (6)

दिए गए फलन का उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$$

25. Find the area intercepted by the straight line $y = x$ from the parabola $x^2 = 4y$ (6)

परवलय $x^2 = 4y$ से सरल रेखा $y = x$ द्वारा कटे हुए भाग का क्षेत्रफल निकालें।

Or/ अथवा

Evaluate $\int_0^2 e^x dx$ as the limit of a sum.

योगफल की सीमा के रूप में $\int_0^2 e^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

26. Solve the differential equation : (6)

अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \cos\frac{y}{x} + x$$

अथवा / Or

Find general solution of the differential equation. (6)

दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$y dx - (x + 2y^2) dy = 0$$

27. Find the shortest distance between the lines: (6)

रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

and

$$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

28. A doctor is to visit a patient. From past experience, it is known that the probability that he will come by train, bus, Scooter or by car are respectively $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, and $\frac{2}{5}$. The probabilities that he will be late are $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, or $\frac{1}{12}$. If he comes by train, bus or scooter respectively but if he comes by Car, he will not be late. When he arrives he is late. What is the probability that he has come by train? (6)

एक डॉक्टर को एक मरीज को देखने आना है। पिछले अनुभव के आधार पर यह ज्ञात है कि उसके ट्रेन, बस, स्कूटर या कार से आने की प्रायिकताएं क्रमशः $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, और $\frac{2}{5}$ है। यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की

प्रायिकताएं क्रमशः $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, या $\frac{1}{12}$ है। किंतु कार से आने पर वह देर से नहीं पहुंचेगा। यदि वह देर से आया तो उसके ट्रेन से आने की क्या प्रायिकता है ?

अथवा / Or

A die is thrown 6 times. It "getting an even number" is a success. Find the probability of getting. (6)

- (i) exactly 5 successes.
- (ii) At least 5 Successes.
- (iii) At most 5 Successes.

एक पासा 6 बार फेंका जाता है। यदि सम संख्या प्राप्त करना सफलता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए। जब :

- (i) ठीक 5 सफलताएं प्राप्त हो।
- (ii) कम से कम 5 सफलताएं प्राप्त हो।
- (iii) अधिक से अधिक 5 सफलताएं प्राप्त हो।

29. Solve the following LPP graphically :

Minimize $Z = 5x + 10y$

Subject to $x + 2y \leq 120$

$$x + y \geq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$$x, y \geq 0$$

निम्नांकित LPP का आलेखीय हल निकालें :

अधिकतमीकरण करें : $Z = 5x + 10y$

जबकि $x + 2y \leq 120$

$$x + y \geq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$$x, y \geq 0$$